Chapitre 4

Les Applications Linéaires

4.1 Applications Linéaires

Définition 4.1.1. *: Soient* $\boldsymbol{E}$ *et* $\boldsymbol{E}$*' deux espaces vectoriels sur*$\boldsymbol{K}$ *et* f *une application de* $\boldsymbol{E}$ *dans* $\boldsymbol{E}$*'. On dit que* f *est linéaire, si :*

1) $f(u+v) = f(u) + f(v)\ \forall u, v \in \boldsymbol{E}$.

2) $f(\lambda v) = \lambda f(v)\ \forall v \in \boldsymbol{E}$, $\forall \lambda \in \boldsymbol{K}$.

L'ensemble des applications linéaires de **E** dans **E**' est noté $\mathcal{L}(\mathbf{E}, \mathbf{E}')$.

Remarque 4.1.1. *:* $f(0) = 0$ *car (homomorphisme de groupes).*

Définition 4.1.2. *: Une application linéaire de* $\boldsymbol{E}$ *dans* $\boldsymbol{E}$ *est appelée endomorphisme.*

Exemple 4.1.1. *:*

1) $\begin{array}{rcl} \Theta : \boldsymbol{E} & \rightarrow & \boldsymbol{E}' \\ v & \mapsto & 0 \end{array}$ *est linéaire dite application nulle.*

2) $\begin{array}{rcl} id_{\boldsymbol{E}} : \boldsymbol{E} & \rightarrow & \boldsymbol{E} \\ v & \mapsto & v \end{array}$ *est linéaire dite application identique de* $\boldsymbol{E}$*.*

3) $\begin{array}{lrcl} u_{\boldsymbol{E}} & : \boldsymbol{E} & \rightarrow & \boldsymbol{E} \\ \alpha \in \boldsymbol{K} & v & \mapsto & \alpha v \end{array}$ *est linéaire dite homothétie de rapport* α*.*

4) $\begin{array}{rcl} D : \mathbb{R}[X] & \rightarrow & \mathbb{R}[X] \\ P & \mapsto & DP = P' \end{array}$ *est linéaire dite dérivation.*

5) Soit $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_1 \bigoplus \boldsymbol{E}_2$.

$\begin{array}{rcl} P_{r_1} : \boldsymbol{E} & \rightarrow & \boldsymbol{E}_1 \\ x = x_1 + x_2 & \mapsto & x_1 \end{array}$ *est linéaire dite projection sur* $\boldsymbol{E}_1$ *parallélement à* $\boldsymbol{E}_2$*.*

6) Soit $v_0 \neq 0$ un vecteur de $\boldsymbol{E}$

$$\begin{array}{lllll} \tau & : & \boldsymbol{E} & \rightarrow & \boldsymbol{E} \\ & & v & \mapsto & v+v_0 \end{array} \quad \begin{array}{l} \textit{application non linéaire car } \tau(0)=v_0 \neq 0, \\ \textit{dite translation.} \end{array}$$

4.2 Image et Noyau

Proposition 4.2.1. *: Soit $f \in \mathcal{L}(\boldsymbol{E}, \boldsymbol{E}')$ et $\boldsymbol{F}$ un sous-espace vectoriel de $\boldsymbol{E}$. Alors $f(\boldsymbol{F})$ est un sous-espace vectoriel de $\boldsymbol{E}$'.*
En particulier $f(\boldsymbol{E})$ est un sous-espace vectoriel de $\boldsymbol{E}$' appelé image de f et noté Imf. Sa dimension est appelée rang de f.

Preuve : On sait que $f(\mathbf{F})$ est un sous-groupe de $\mathbf{E}$', il suffit donc de vérifier la stabilité pour l'opération externe.

Soit $\lambda \in \mathbf{K}$ et $f(v) \in f(\mathbf{F})$, $\lambda f(v) = f(\lambda v) \in f(\mathbf{F})$.

Proposition 4.2.2. *: Soit $f \in \mathcal{L}(\boldsymbol{E}, \boldsymbol{E}')$, $Kerf = \{x \in \boldsymbol{E}/f(x) = 0\}$ est un sous-espace vectoriel de $\boldsymbol{E}$, appelé noyau de f.*

Preuve : Il suffit de vérifier la stabilité pour l'opération externe.

Soit $\lambda \in \mathbf{K}$ et $x \in Kerf$, $f(\lambda x) = \lambda f(x) = \lambda 0 = 0 \Rightarrow \lambda x \in Kerf$.

Proposition 4.2.3. *: f est injective $\Leftrightarrow Kerf = \{0\}$.*

Exemple 4.2.1. *:*

1) Soit $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_1 \bigoplus \boldsymbol{E}_2$, $ImP_{r_1} = \boldsymbol{E}_1$, $KerP_{r_2} = \boldsymbol{E}_2$

2) $$\begin{array}{llll} D & : & \mathbb{R}[X] & \rightarrow & \mathbb{R}[X] \\ & & P & \mapsto & DP = P' \end{array}$$

$KerD = \mathbb{R}$, $ImD = \mathbb{R}[X]$.

3) $$\begin{array}{lllll} f & : & \mathbb{R}^3 & \rightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & & (x,y,z) & \mapsto & (2x+y, y-z) \end{array}$$

$Kerf = \{(x,y,z)/y = -2x$ *et* $z = y\} = \{(x,-2x,-2x)/x \in \mathbb{R}\}$ *droite vectorielle engendrée par* $(1,-2,-2)$.

$$\begin{array}{lll} Imf & = & \{(x',y')/\exists x,y,z; x' = 2x+y \textit{ et } y' = y-z\} \\ & = & \left\{(x',y')/y = y'+z \textit{ et } x = \frac{1}{2}(x'-y'-z)\right\} \end{array}.$$

Posons $z = 0$ donc $y = y'$ et $x = \frac{1}{2}(x'-y')$. D'où $\forall (x',y') \in \mathbb{R}^2$ $\exists (\frac{1}{2}(x'-y'), y', 0) \in \mathbb{R}^3$; $f((\frac{1}{2}(x'-y'), y', 0)) = (x',y')$ donc f est surjective, et par suite $Imf = \mathbb{R}^2$.

Proposition 4.2.4. *: Soit $f \in \mathcal{L}(\boldsymbol{E}, \boldsymbol{E}')$ et $\{v_i\}_{1\leq i\leq n}$ une famille de vecteurs de $\boldsymbol{E}$.*

1) Si f est injective et la famille $\{v_i\}_{1\leq i\leq n}$ est libre dans $\boldsymbol{E}$, alors la famille $\{f(v_i)\}_{1\leq i\leq n}$ est libre dans $\boldsymbol{E}$'.

2) Si f est surjective et la famille $\{v_i\}_{1\leq i\leq n}$ est génératrice de $\boldsymbol{E}$, alors la famille $\{f(v_i)\}_{1\leq i\leq n}$ est génératrice de $\boldsymbol{E}$'.

En particulier si f est bijective, l'image d'une base de $\boldsymbol{E}$ est une base de $\boldsymbol{E}$'.

Preuve : 1) Comme f est une application linéaire injective, alors on a :

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{i=n} \lambda_i f(v_i) &= 0 \\
&\Longrightarrow f(\sum_{i=1}^{i=n} \lambda_i v_i) = 0 \qquad (\ f \text{ application linéaire }) \\
&\Longrightarrow \sum_{i=1}^{i=n} \lambda_i v_i = 0 \\
&\Longrightarrow \lambda_i = 0 \quad \forall i = 1, ..., n \quad \{v_i\}_{1\leq i\leq n} \text{ libre}
\end{aligned}$$

2) $\forall x \in \mathbf{E}$, $\exists \lambda_i \in \mathbf{K}$; $x = \sum_{i=1}^{i=n} \lambda_i v_i$.

Soit $y \in \mathbf{E}'$, $\exists x \in \mathbf{E}$; $y = f(x) = f(\sum_{i=1}^{i=n} \lambda_i v_i)$ (surj) d'où $y = \sum_{i=1}^{i=n} \lambda_i f(v_i)$.

Théorème 4.2.1. *: Deux espaces vectoriels de dimension finie sont isomorphes, si et seulement si, ils ont même dimension.*

Preuve : $\Rightarrow$) $f : \mathbf{E} \to \mathbf{E}'$ isomorphisme, d'après la proposition précédente l'image d'une base de **E** est une base de **E**', donc **E** et **E**' ont même dimension.

$\Leftarrow$) Supposons $dim\mathbf{E} = dim\mathbf{E}'$, soit $\{e_1, ..., e_n\}$ une base de **E** et $\{e'_1, ..., e'_n\}$ une base de **E**'. Considérons l'application

$$\begin{array}{cccc} f : & \mathbf{E} & \longrightarrow & \mathbf{E}' \\ & e_k & \longmapsto & e'_k \end{array}$$

Pour $x = \sum_{i=1}^{i=n} \lambda_i e_i$, on pose $f(x) = f(\sum_{i=1}^{i=n} \lambda_i e_i) = \sum_{i=1}^{i=n} \lambda_i e'_i$, on vérifie que f est linéaire bijective.

Corollaire 4.2.1. *: $\boldsymbol{E}$ espace vectoriel de dimension finie sur $\boldsymbol{K}$.*

$\boldsymbol{E}$ est isomorphe à $\boldsymbol{K}^n \Longleftrightarrow dim_{\boldsymbol{K}}\boldsymbol{E} = n$.

Théorème 4.2.2. *(Théorème de la dimension) : Soient $\boldsymbol{E}$ et $\boldsymbol{E}$' deux espaces vectoriels de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(\boldsymbol{E}, \boldsymbol{E}')$, alors $dim\boldsymbol{E} = dim(Kerf) + dim(Imf)$.*

Preuve : Supposons $dim\mathbf{E} = n$, $dim(Kerf) = r$ et montrons que $dim(Imf) = n - r$.

Soit $\{w_1, ..., w_r\}$ une base de $Kerf$, complétons la pour obtenir une base de $\mathbf{E}$ en l'occurrence $\{w_1, ..., w_r, v_1, ..., v_{n-r}\}$.

Montrons que $\mathcal{B} = \{f(v_1), ..., f(v_{n-r})\}$ est une base de Imf.

1) $\mathcal{B}$ engendre Imf, en effet :

$$f(x) = f(\sum_{i=1}^{r} \alpha_i w_i + \sum_{i=1}^{n-r} \lambda_i v_i) = \sum_{i=1}^{n-r} \lambda_i f(v_i).$$

b) $\mathcal{B}$ est libre :

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n-r} \lambda_i f(v_i) &= 0 \\
&\Longrightarrow f(\sum_{i=1}^{n-r} \lambda_i v_i) = 0 \qquad (f \text{ application linéaire}) \\
&\Longrightarrow \sum_{i=1}^{n-r} \lambda_i v_i \in Kerf \\
&\Longrightarrow \sum_{i=1}^{n-r} \lambda_i v_i = \sum_{i=1}^{r} \alpha_i w_i \\
&\Longrightarrow \sum_{i=1}^{n-r} \lambda_i v_i - \sum_{i=1}^{r} \alpha_i w_i = 0 \\
&\Longrightarrow \lambda_i = 0, i = 1, ..., n-r; \quad \alpha_i = 0, i = 0, ..., r
\end{aligned}$$

Corollaire 4.2.2. *: Soit $f \in \mathcal{L}(\boldsymbol{E}, \boldsymbol{E}')$, $\boldsymbol{E}$ et $\boldsymbol{E}$' étant deux espaces vectoriels de même dimension finie, alors les propriétés suivantes sont équivalentes :*

1) f est injective.

2) f est surjective.

3) f est bijective.

Preuve : $dim\mathbf{E} = dim(Kerf) + dim(Imf)$. Il suffit de montrer 1) $\Longleftrightarrow$ 2).

f injective $\Longleftrightarrow Kerf = \{0\} \Longleftrightarrow dim\mathbf{E} = dim(Imf) \Longleftrightarrow dim\mathbf{E}' = dim(Imf) \Longleftrightarrow \mathbf{E}' = Imf \Longleftrightarrow f$ est surjective.

Remarque 4.2.1. *: 1) Ce résultat est faux en dimension infinie.*

En effet :

$$\begin{array}{rcccl} D & : & \mathbb{R}[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}[X] \\ & & P & \longmapsto & DP = P' \end{array} \quad \textit{est surjective, non injective.}$$

2) Une application linéaire f est parfaitement définie si on connaît l'image des vecteurs d'une base, car d'après la linéarité de f on a $f(x) = f(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i f(e_i)$, donc si on connaît $f(e_1)$,..., $f(e_n)$, f est connue en tout x.

4.3 Matrices Associées aux Applications Linéaires

Soient $\mathbf{E}$ et $\mathbf{E}$' deux espaces vectoriels sur $\mathbf{K}$, de dimension finie n et p respectivement, et $f : \mathbf{E} \longmapsto \mathbf{E}'$ une application linéaire. Choisissons $\{e_1, ..., e_n\}$ une base de $\mathbf{E}$ et $\{e'_1, ..., e'_p\}$ une base de $\mathbf{E}$'. Les images par f des vecteurs $\{e_1, ..., e_n\}$ se décomposent sur la base $\{e'_1, ..., e'_p\}$:

$$\begin{array}{rcl} f(e_1) & = & a_{11}e'_1 + a_{21}e'_2 + ... + a_{p1}e'_p \\ f(e_2) & = & a_{12}e'_1 + a_{22}e'_2 + ... + a_{p2}e'_p \\ & = & \\ & \vdots & \\ & = & \\ f(e_n) & = & a_{1n}e'_1 + a_{2n}e'_2 + ... + a_{pn}e'_p \end{array}$$

Définition 4.3.1. *: On appelle matrice de f dans les bases $\{e_1, ..., e_n\}$ et $\{e'_1, ..., e'_p\}$, la matrice notée par $M(f)_{e_i,e'_j}$ appartenant à $\mathcal{M}_{p,n}(\boldsymbol{K})$ dont les colonnes sont les composantes des vecteurs $f(e_1), ..., f(e_n)$ dans la base $\{e'_1, ..., e'_p\}$:*

$$f(e_1) \quad f(e_2) \quad . \quad \dots \quad . \quad f(e_n)$$

$$M(f)_{e_i,e'_j} = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & . & \dots & . & a_{1n} \\ . & & & & & . \\ \vdots & & & & & \vdots \\ . & & & & & . \\ a_{p1} & a_{p2} & . & \dots & . & a_{pn} \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} e'_1 \\ e'_2 \\ \vdots \\ e'_{p-1} \\ e'_p \end{array}$$

Il est clair que la matrice associée à f dépend du choix des bases de $\boldsymbol{E}$ et $\boldsymbol{E}$'.

Exemple 4.3.1. *:*

1) Soit $\boldsymbol{E}$ un espace vectoriel de dimension n et

$$\begin{array}{rcccl} id_{\boldsymbol{E}} & : & \boldsymbol{E} & \longrightarrow & \boldsymbol{E} \\ & & x & \longmapsto & x \end{array}$$

On considère une base $\{e_i\}$ de $\boldsymbol{E}$.

$$M(id_{\boldsymbol{E}})_{e_i} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & . & . & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & . & \dots & 0 \\ . & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ . & & & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & & . & 0 \\ 0 & 0 & . & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_n \text{ matrice unité de } \mathcal{M}_n(\boldsymbol{K}).$$

2) Soit $\boldsymbol{E} = \mathbb{R}^2$ et $\begin{array}{rcccl} Pr_1 & : & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & & (x,y) & \longmapsto & (x,0) \end{array}$

Considérons la base canonique $\{e_1, e_2\}$ de $\mathbb{R}^2$ on a $Pr_1(e_1) = e_1$, $Pr_1(e_2) =$ 0.

$$M(Pr_1)_{e_i} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

3) Soit $\{e_1, e_2, e_3\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et $\{e'_1, e'_2\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$. Considérons l'application linéaire :

$$\begin{array}{rcccl} f & : & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & & (x,y,z) & \longmapsto & (x-y, z-y) \end{array}$$

$$M(f)_{e_i,e'_j} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

4) On considère la forme linéaire sur $\mathbb{R}^n$

$$\begin{array}{rcccl} f & : & \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & (x_1,...,x_n) & \longmapsto & a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n \end{array}$$

En munissant $\mathbb{R}^n$ *et* $\mathbb{R}$ *de leurs bases canoniques respectives* $\{e_i\}$ *et* $\{1\}$ *on obtient* $M(f)_{e_i,1} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \ldots & a_n \end{pmatrix}$

5) $D \;:\; \mathbb{R}_4[X] \longrightarrow \mathbb{R}_3[X]$

$\qquad P \longmapsto DP = P'$

$M(D) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ *par rapport aux bases canoniques de* $\mathbb{R}_4[X]$ *et* $\mathbb{R}_3[X]$.

Proposition 4.3.1. *: Soient* $\boldsymbol{E}$ *et* $\boldsymbol{E}$*' deux espaces vectoriels sur* $\boldsymbol{K}$ *de dimension n et p respectivement,* $\{e_i\}$ *et* $\{e'_j\}$ *des bases de* $\boldsymbol{E}$ *et* $\boldsymbol{E}$*'. Alors l'application :*

$M \;:\; \mathcal{L}(\boldsymbol{E}, \boldsymbol{E}') \longrightarrow \mathcal{M}_{p,n}(\boldsymbol{K})$

$\qquad f \longmapsto M(f)_{e_i,e'_j}$

est un isomorphisme d'espaces vectoriels c'est à dire :

$M(f+g) = M(f) + M(g)$, $M(\lambda f) = \lambda M(f)$ *et* M *est bijective, en particulier* $dim\mathcal{L}(\boldsymbol{E}, \boldsymbol{E}') = np$.

Preuve :

$$M(f+g)_{e_i,e'_j} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} (f+g)(e_1) & \ldots & (f+g)(e_n) \end{array} \\ \begin{pmatrix} - & \ldots & - \\ - & \ldots & - \\ - & \ldots & - \\ - & \ldots & - \\ - & \ldots & - \end{pmatrix} \end{array}$$

$$= \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} f(e_1) & \ldots & f(e_n) \end{array} \\ \begin{pmatrix} - & \ldots & - \\ - & \ldots & - \\ - & \ldots & - \\ - & \ldots & - \\ - & \ldots & - \end{pmatrix} \end{array} + \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} g(e_1) & \ldots & g(e_n) \end{array} \\ \begin{pmatrix} - & \ldots & - \\ - & \ldots & - \\ - & \ldots & - \\ - & \ldots & - \\ - & \ldots & - \end{pmatrix} \end{array}$$

$$= M(f)_{e_i,e'_j} + M(g)_{e_i,e'_j}$$

De même

$$M(\lambda f)_{e_i,e'_j} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} (\lambda f)(e_1) & . & . & . & (\lambda f)(e_n) \end{array} \\ \begin{pmatrix} - & . & . & . & - \\ - & . & . & . & - \\ - & . & . & . & - \\ - & . & . & . & - \\ - & . & . & . & - \end{pmatrix} \end{array} = \lambda M(f)_{e_i,e'_j}$$

donc M est linéaire.

Soit $f \in KerM \Longrightarrow M(f)_{e_i,e'_j} = 0 \Longrightarrow f(e_1) = f(e_2) = ... = f(e_n) = 0$, donc si $x \in \mathbf{E}$ $x = \sum_{i=1}^{i=n} \lambda_i e_i$, $f(x) = \sum_{i=1}^{i=n} \lambda_i f(e_i) = 0$, d'où $f = 0$, donc M est injective.

Elle est aussi surjective, car si

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & & & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ & & & \\ a_{p1} & & ... & a_{pn} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbf{K})$$

On considère f en posant :

$$\begin{aligned} f(e_1) &= a_{11}e'_1 + ... + a_{p1}e'_p \\ &\vdots \\ f(e_n) &= a_{1n}e'_1 + ... + a_{pn}e'_p. \end{aligned}$$

Pour $x \in \mathbf{E}$; $x = \lambda_1 e_1 + ... + \lambda_n e_n$, on pose $f(x) = \lambda_1 f(e_1) + ... + \lambda_n f(e_n)$. On vérifie que f est linéaire et $M(f)_{e_i,e'_j} = A$.

4.4 Matrice d'un Vecteur. Calcul de l'Image d'un Vecteur

Définition 4.4.1. *: Soit $\boldsymbol{E}$ un espace vectoriel de dimension n, $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ une base de $\boldsymbol{E}$ et $x = \sum_{i=1}^{i=n} x_i e_i$ un vecteur de $\boldsymbol{E}$. On appelle matrice de x dans la base $\{e_i\}$:*

$$M(x)_{e_i} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Proposition 4.4.1. *: Soit $f \in \mathcal{L}(\boldsymbol{E}, \boldsymbol{E'})$, $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ et $\left\{e'_1, e'_2, ..., e'_p\right\}$ deux bases de $\boldsymbol{E}$ et $\boldsymbol{E}$' respectivement, pour tout $x \in \boldsymbol{E}$, on a :*

$M(f(x))_{e'_j} = M(f)_{e_i,e'_j} M(x)_{e_i}$.

Preuve : Soit $M(f)_{e_i,e'_j} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & & & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ & & & \\ a_{p1} & & \dots & a_{pn} \end{pmatrix}$

d'où $f(e_j) = \sum_{k=1}^{p} a_{kj} e'_k$.

On a

$$f(x) = f(\sum_{j=1}^{j=n} x_j e_j) = \sum_{j=1}^{j=n} x_j f(e_j) = \sum_{j=1}^{j=n} x_j \sum_{k=1}^{p} a_{kj} e'_k$$
$$= \sum_{k=1}^{p} \underbrace{(\sum_{j=1}^{n} x_j a_{kj})}_{y_k} e'_k = \sum_{k=1}^{p} y_k e'_k$$

donc $M(f(x))_{e'_j} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_p \end{pmatrix}$.

D'autre part

$$M(f)_{e_i,e'_j} M(x)_{e_i} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & & & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ & & & \\ a_{p1} & & \dots & a_{pn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \\ \vdots \\ \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{n} a_{1j} x_j \\ \\ \vdots \\ \\ \sum_{j=1}^{n} a_{pj} x_j \end{pmatrix}$$

d'où le résultat.

Exemple 4.4.1. *:*

Soit le plan rapporté à sa base canonique. Déterminer l'image du vecteur $x = (3, 2)$ par rotation de centre O et d'angle $\frac{\Pi}{6}$.

On a

$$\begin{aligned}
M(f(x)) &= M(f)M(x)\\
&= \begin{pmatrix} cos\frac{\Pi}{6} & -sin\frac{\Pi}{6} \\ sin\frac{\Pi}{6} & cos\frac{\Pi}{6} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{-1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad .\\
&= \begin{pmatrix} \frac{3\sqrt{3}-2}{2} \\ \frac{2\sqrt{3}+3}{2} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

4.5 Matrice de l'Inverse d'une Application

Proposition 4.5.1. *: Soient **E**, **E**', **E**" trois espaces vectoriels sur **K**,* $\{e_1, ..., e_n\}$, $\left\{e'_1, ..., e'_p\right\}$, $\left\{e''_1, ..., e''_q\right\}$ *des bases de **E**, **E**' et **E**" respectivement. Si* $g \in \mathcal{L}(\boldsymbol{E}, \boldsymbol{E}')$ *et* $f \in \mathcal{L}(\boldsymbol{E}', \boldsymbol{E}'')$*, on a* $M(fog)_{e_i, e''_k} = M(f)_{e'_j, e''_k} M(g)_{e_i, e'_j}$.

Preuve : Soit $x \in \mathbf{E}$ arbitraire. En utilisant la proposition du paragraphe 2, on a :
$M(fog)M(x) = M(f(g(x))) = M(f)M(g(x)) = M(f)M(g)M(x)$. Puisque x est arbitraire, $M(fog) = M(f)M(g)$.

Proposition 4.5.2. *:* $f \in \mathcal{L}(\boldsymbol{E}, \boldsymbol{E}')$ *est bijective si et seulement si* $M(f)_{e_i, e'_j}$ *est inversible.*

De plus $M(f^{-1})_{e'_i, e_j} = M(f)^{-1}_{e_i, e'_j}$.

Preuve : $f^{-1}of = id_{\mathbf{E}}$, d'où
$M(f^{-1}of)_{e_i, e_i} = M(id_{\mathbf{E}}) = I \implies M(f^{-1})M(f) = I \implies M(f^{-1}) = M(f)^{-1}$.

4.6 Changement de Bases

Définition 4.6.1. *: On appelle matrice de passage de la base* $\{e_i\}$ *à la base* $\{e'_i\}$ *du même espace vectoriel **E**, la matrice* $P_{e_i \to e'_i}$ *dont les colonnes sont les composantes des vecteurs* e'_i *dans la base* $\{e_i\}$ *:*

$$P_{e_i \to e'_i} = \begin{pmatrix} p_{11} & \cdots & p_{1n} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ p_{n1} & \cdots & p_{nn} \end{pmatrix} = M(id_{\boldsymbol{E}})_{e'_i, e_i}.$$

Remarque 4.6.1. *: Une matrice de passage est toujours inversible et on a* $(P_{e_i\to e'_i})^{-1} = P_{e'_i\to e_i}$.

Proposition 4.6.1. *: Soient* $x \in \boldsymbol{E}$, $\{e_i\}$ *et* $\{e'_i\}$ *deux bases de* $\boldsymbol{E}$, $P = P_{e_i\to e'_i}$ *et* $X = M(x)_{e_i}$, $X' = M(x)_{e'_i}$, *on a* $X' = P^{-1}X$.

Preuve : $PX' = M(id_{\mathbf{E}})_{e'_i,e_i}M(x)_{e'_i} = M(id_{\mathbf{E}}(x))_{e_i} = M(x)_{e_i} = X$.

Exemple 4.6.1. *:*

Soit $\mathbb{R}^2$ *muni de deux bases, la base canonique* $\{e_1, e_2\}$ *et la base* $\{e'_1, e'_2\}$ *définie par :*

$e'_1 = 2e_1 + e_2$, $e'_2 = 3e_1 + 2e_2$

Soit $x = 2e_1 + 3e_2$, *calculons les composantes de* x *dans la base* $\{e'_1, e'_2\}$.

$P = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $P^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, $X' = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 4 \end{pmatrix}$

$x = -5e'_1 + 4e'_2$.

Proposition 4.6.2. *: Soient* $f \in \mathcal{L}(\boldsymbol{E}, \boldsymbol{E'})$, $\{e_1, ..., e_n\}$, $\{\varepsilon_1, ..., \varepsilon_n\}$ *deux bases de* $\boldsymbol{E}$ *et* $\left\{e'_1, ..., e'_p\right\}$, $\left\{\varepsilon'_1, ..., \varepsilon'_p\right\}$ *deux bases de* $\boldsymbol{E}$*'.*

Notons $A = M(f)_{e_i,e'_j}$, $A' = M(f)_{\epsilon_i,\varepsilon'_j}$, $P = P_{e_i\to\varepsilon_i}$, $Q = P_{e'_j\to\varepsilon'_j}$.

On a alors $A' = Q^{-1}AP$.

Preuve :

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{E}_{(e_i)} & \xrightarrow{f} & \mathbf{E}'_{(e'_j)} \\ id_{\mathbf{E}} \downarrow & & \downarrow id_{\mathbf{E}'} \\ \mathbf{E}_{(\varepsilon_i)} & \xrightarrow{f} & \mathbf{E}'_{(\varepsilon'_j)} \end{array}$$

On a $foid_{\mathbf{E}} = id_{\mathbf{E}}\text{'}of$ d'où $M(foid_{\mathbf{E}}) = M(id_{\mathbf{E}}\text{'}of)$, c'est à dire

$$M(f)_{\varepsilon_i,\varepsilon'_j}M(id_{\mathbf{E}})_{e_i,\varepsilon_i} = M(id_{\mathbf{E}}\text{'})_{e'_j,\varepsilon'_j}M(f)_{e_i,e'_j},$$

c'est à dire $A'P^{-1} = Q^{-1}A$ donc $A' = Q^{-1}AP$.

Corollaire 4.6.1. *: Soient* $f \in \mathcal{L}(\boldsymbol{E})$ *et* $\{e_1, ..., e_n\}$, $\{e'_1, ..., e'_n\}$ *deux bases de* $\boldsymbol{E}$.

Notons $A = M(f)_{e_i}$, $A' = M(f)_{e'_i}$ *et* $P = P_{e_i\to e'_i}$.

On a alors $A' = P^{-1}AP$.

Définition 4.6.2. *: Deux matrices A, $A' \in \mathcal{M}_n(\boldsymbol{K})$ sont dites semblables s'il existe une matrice $P \in \mathcal{M}_n(\boldsymbol{K})$ inversible telle que :*

$A' = P^{-1}AP$.

Exemple 4.6.2. *:*

Soit f un endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ qui dans la base canonique $\{e_i\}$ est représenté par la matrice : $A = M(f)_{e_i} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Déterminons la matrice A' qui représente f dans la base $e'_1 = (0, -1)$ et $e'_2 = (1, 1)$.

$$\text{On a} \quad \begin{aligned} A' &= P^{-1}AP \\ &= \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \end{aligned} .$$

4.7 Rang d'une Matrice

Définition 4.7.1. *: Soit $\{v_1, ..., v_n\}$ une famille de vecteurs, on appelle rang de la famille, la dimension de l'espace engendré par les vecteurs v_i.*

Soit $A' \in \mathcal{M}_{p,n}(\boldsymbol{K})$, $A = (c_1, ..., c_n)$ où l'on a noté c_i les vecteurs colonnes de A ($c_i \in \boldsymbol{K}^p$). On appelle rang de A le rang de la famille des vecteurs colonnes de A.

Proposition 4.7.1. *: Soit $f \in \mathcal{L}(\boldsymbol{E}, \boldsymbol{E'})$. Soient $\{e_1, ..., e_n\}$ et $\{e'_1, ..., e'_p\}$ deux bases quelconques de $\boldsymbol{E}$ et $\boldsymbol{E'}$ respectivement et $A = M(f)_{e_i, e'_j} = (a_{ij})$.*

On a alors $rang f = rang A$.

Ainsi deux matrices qui représentent la même application linéaire dans des bases différentes ont même rang ; en particulier deux matrices semblables ont même rang.

Preuve : On considère le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{K}^n & \xrightarrow{h} & \mathbf{K}^p \\ u\downarrow & & \downarrow v \quad h = v^{-1}ofou \\ \mathbf{E}_{(e_i)} & \xrightarrow{f} & \mathbf{E'}_{(e'_j)} \end{array}$$

u et v sont définis en associant à chaque vecteur de la base canonique de $\mathbf{K}^n$ (resp $\mathbf{K}^p$)
ε_i (resp ε'_j) le vecteur e_i (resp e'_j), alors l'application h a précisément A comme matrice dans les deux bases canoniques car $h(\varepsilon_i) = v^{-1}ofou(\varepsilon_i) = v^{-1}of(e_i) = v^{-1}(\sum a_{ij}e'_j) = \sum\limits_j a_{ji}\varepsilon'_j$. Donc $rangA = rangh$ et d'après le lemme suivant, on déduit que $rangA = rangf$

Lemme 4.7.1. *: Soient $f \in \mathcal{L}(\boldsymbol{E}, \boldsymbol{F})$ et $g \in \mathcal{L}(\boldsymbol{G}, \boldsymbol{E})$, alors*

1) Si g est surjective, alors $rangf = rang(fog)$.

2) Si f est injective, alors $rangg = rang(fog)$.

Preuve : 1) $rangf = dimf(\mathbf{E}) = dimf(g(\mathbf{G})) = dim(fog)(\mathbf{E})$
$= rang(fog)$

2) Soit $\{v_i\}$ avec $v_i = g(w_i)$ une base de Img, alors $f(v_i) = (fog)(w_i)$. Comme f est injective $\{f(v_i)\}$ est libre et engendre $Im(fog)$ car $y \in Im(fog) \Longrightarrow \exists x\,;\ y = f(\underbrace{g(x)}_{\in Img}) = f(\sum \alpha_i v_i) = \sum \alpha_i f(v_i)$ donc $\{f(v_i)\}$ est une base de $Im(fog)$, d'où $rangg = rang(fog)$.

On en déduit qu'en composant à gauche ou à droite par une application linéaire bijective, le rang ne change pas.

4.8 Matrices Remarquables

a) Matrice Diagonale $(a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})\,;\ a_{ij} = 0$ pour $i \neq j$.

b) Matrice Triangulaire Supérieure $(a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})\,;\ a_{ij} = 0$ pour $i > j$.

c) Transposée d'une Matrice $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbf{K})$; c'est ${}^tA = (a_{ji}) \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbf{K})$. Elle vérifie ${}^t({}^tA) = A$, ${}^t(A+B) = {}^tA + {}^tB$, ${}^t(\lambda A) = \lambda\, {}^tA$ $\forall A, B \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbf{K})$ et $\lambda \in \mathbf{K}$; c'est à dire que l'application :

$$\begin{array}{cccccl} \Psi & : & \mathcal{M}_{m,n}(\mathbf{K}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_{n,m}(\mathbf{K}) & \text{est un isomorphisme} \\ & & A & \longmapsto & {}^tA & \text{d'espaces vectoriels} \end{array}$$

On a aussi ${}^t(AB) = {}^tB\,{}^tA$ $\forall A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$ et $\forall B \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbf{K})$.

Définition 4.8.1. *: $A, B \in \mathcal{M}_{n,p}(\boldsymbol{K})$ sont équivalentes s'il existe $P \in Gl_p(\boldsymbol{K})$ et $Q \in Gl_n(\boldsymbol{K})$ telles que $B = Q^{-1}AP$. C'est en fait une relation d'équivalence sur $\mathcal{M}_{n,p}(\boldsymbol{K})$, notée $\simeq$.*

Théorème 4.8.1. *: $A, B \in \mathcal{M}_{n,p}(\boldsymbol{K})$ sont équivalentes si et seulement si $rangA = rangB$.*

Démontrons d'abord le lemme suivant :

Lemme 4.8.1. *: $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\boldsymbol{K})$;*

$$rangA = r \Longleftrightarrow \left(A \simeq \left(\begin{array}{cccc} \overset{\in \mathcal{M}_{r,r}(\boldsymbol{K})}{\boxed{\begin{array}{c} 1\ 0 \dots 0 \\ 0\ 1\ 0 \vdots \\ \vdots \ddots \ddots \\ 0 \dots 0\ 1 \end{array}}} & \begin{array}{c} 0 \\ \\ \vdots \\ 0 \end{array} & \begin{array}{c} \dots \\ \\ \vdots \\ \dots \end{array} & \begin{array}{c} 0 \\ \\ \vdots \\ 0 \end{array} \\ 0\dots & \dots\dots & \dots\ \dots & \dots\ 0 \end{array} \right) \right)$$

Cette dernière est notée J_r.

Preuve : $\Leftarrow$) trivial.

$\Rightarrow$) $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$ définit une application linéaire
$\Phi : \mathbf{K}^p_{(e_i)} \longrightarrow \mathbf{K}^n_{(e'_j)}$. On munit $\mathbf{K}^p$ et $\mathbf{K}^n$ des bases canoniques (e_i) et (e'_j) respectivement.

Soit r le nombre de vecteurs linéairement indépendants parmi les images des vecteurs de la base (e_i) ; c.à.d $Ae_1,...,Ae_p$, qu'on peut supposer être $Ae_1,...,Ae_r$, les autres vecteurs $Ae_{r+1},...,Ae_p$ peuvent s'exprimer en fonction de ces derniers :

$Ae_k = \sum_{j=1}^{r} c_{kj} Ae_j$ pour $k = r+1, ..., p$.

On définit une nouvelle base $f_1, ..., f_p$ dans $\mathbf{K}^p$; comme suit

$$f_k = \begin{cases} e_k, & \text{pour k=1,...,r ;} \\ e_k - \sum_{j=1}^{r} c_{kj} e_j, & \text{pour k=r+1,...,p.} \end{cases}$$

On a alors $Af_k = 0$ pour $k = r+1, ..., p$.

Posons alors $Af_j = t_j$ pour $j = 1, ..., r$. Les t_j sont par hypothèse linéairement indépendants. Complétons les pour obtenir une base de $\mathbf{K}^n$, disons $t_{r+1}, ..., t_n$. Considérons alors la matrice de l'application linéaire Φ dans les nouvelles bases $f_1, ..., f_p$ et $t_1, ..., t_n$, on a alors :

$$M(\Phi)_{f_i,t_j} = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 1\ 0 \dots 0 \\ 0\ 1\ 0\ \vdots \\ \vdots \ddots \ddots \\ 0 \dots 0\ 1 \end{matrix}} & \begin{matrix} 0 & \dots & 0 \\ & & \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{matrix} \\ 0\dots & \dots\dots\dots\dots 0 \end{pmatrix} = J_r$$

A et $M(\Phi)_{f_i,t_j}$ représentent la même application linéaire, et sont donc équivalentes.

Preuve du théorème : $\Rightarrow$) trivial.

$\Leftarrow$) $rangA = rangB = r$ entraînent $A \simeq J_r$, $B \simeq J_r$, d'où $A \simeq B$.

Théorème 4.8.2. *: Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\boldsymbol{K})$, alors $rangA = rang^t A$ c'est à dire que le rang d'une matrice ; est aussi le rang de la famille des vecteurs lignes.*

Preuve : $rangA = r \Longrightarrow A \simeq J_r \Longrightarrow \exists P \in Gl_p(\mathbf{K})$ et $Q \in Gl_n(\mathbf{K})$, $A = Q^{-1}J_rP \Longrightarrow {}^tA = {}^tP\ {}^tJ_r\ {}^tQ^{-1} = ({}^tP^{-1})^{-1}\ {}^tJ_r\ ({}^tQ^{-1}) = {}^t(P^{-1})^{-1}\ J'_r$ $({}^tQ^{-1})$ car ${}^tJ_r = J'_r$ d'où ${}^tA \simeq J'_r \Longrightarrow rang^t A = r = rangA$.

Exemple 4.8.1. *:*

Déterminer le rang de la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 2 & 6 & -3 & -3 \\ 3 & 10 & -6 & -5 \end{pmatrix}$.

On utilise les opérations élémentaires sur les lignes

$$rg \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 2 & 6 & -3 & -3 \\ 3 & 10 & -6 & -5 \end{pmatrix} \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{matrix} = rg \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -3 & -1 \\ 0 & 4 & -6 & -2 \end{pmatrix} \begin{matrix} L_1 \\ L_2 - 2L_1 \\ L_3 - 3L_1 \end{matrix}$$

$$= rg \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} L_1 \\ L_2 - 2L_1 \\ L_3 + L_1 - 2L_2 \end{matrix} = 2$$

Car les deux vecteurs lignes sont linéairement indépendants.

4.9 Application des Déterminants à la Théorie du Rang

4.9.1 Caractérisation des Bases

Théorème 4.9.1. *: Soit $\boldsymbol{E}$ un espace vectoriel de dimension n. Les vecteurs $v_1, ..., v_n$ de $\boldsymbol{E}$ forment une base de $\boldsymbol{E}$ si et seulement si det $\left\| v_1, \cdots, v_n \right\|_{(e_i)} \neq$*

0 *où* $\left\|v_1, \cdots, v_n\right\|_{(e_i)}$ *désigne la matrice dont les colonnes sont les composantes des vecteurs* $v_1, ..., v_n$ *dans la base* (e_i) *de* $\boldsymbol{E}$.

Preuve : Il suffit de montrer que $\{v_1, ..., v_n\}$ est libre si et seulement si $det\left\|v_1, \cdots, v_n\right\|_{(e_i)} \neq 0$.

$\Longleftarrow$) $\sum_{i=1}^{i=n} \alpha_i v_i = 0$, posons $v_i = \sum_{k=1}^{k=n} a_{ki} e_k$, alors on a

$\sum_{i=1}^{i=n} \alpha_i (\sum_{k=1}^{k=n} a_{ki} e_k) = 0$ d'où $\sum_{i,k}^{n} \alpha_i a_{ki} e_k = 0 \Longrightarrow \sum_{i=1}^{n} \alpha_i a_{1i} = 0$, $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i a_{2i} = 0$, ..., $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i a_{ni} = 0 \Longrightarrow$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \tag{4.1}$$

d'où $\alpha_i = 0 \ \forall i = 1, ..., n$

$\Longrightarrow$) Si $det\left\|v_1, \ \dots \ , v_n\right\|_{(e_i)} = 0 \Longrightarrow$ le système homogène (4.1) admet une infinité de solutions, d'où $\{v_1, ..., v_n\}$ est liée.

4.9.2 Comment reconnaître si une famille de vecteurs est libre

On appelle mineur d'une matrice A, tout déterminant d'une matrice carrée extraite de A.

Théorème 4.9.2. *: Soient* $\{v_1, ..., v_r\}$ *r vecteurs d'un espace vectoriel* $\boldsymbol{E}$ *de dimension n (* $r \leq n$ *) et* $A = \left\|v_1, \cdots, v_r\right\|$,
($A \in \mathcal{M}_{n,r}(\boldsymbol{K})$ *).*

La famille $\{v_1, ..., v_r\}$ *est libre si et seulement si on peut extraire de A un mineur d'ordre r non nul.*

Preuve : Similaire à celle du théorème précédent, en complétant les vecteurs afin de former une base de **E**.

4.9.3 Comment reconnaître si un vecteur appartient à l'espace engendré par d'autres vecteurs

Soit A une matrice et δ un mineur d'ordre r extrait de A. On appelle bordant de δ tout mineur d'ordre $r+1$ extrait de A, dont δ est un déterminant extrait.

Si $A \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbf{K})$ et δ un mineur d'ordre r, il ya exactement $(p-r)(n-r)$ bordants de δ dans A.

Théorème 4.9.3. *: Soient $\{v_1, ..., v_r\}$ r vecteurs linéairement indépendants et δ un mineur d'ordre r non nul extrait de A, où $A = \left\| v_1, \cdots, v_r \right\|$.*

Pour qu'un vecteur $w \in \langle v_1, ..., v_r \rangle$ il faut et il suffit que tous les bordants de δ dans la matrice $B = \left\| v_1, \cdots, v_r, w \right\|$ soient nuls.

Preuve : $\Longrightarrow$) Si l'un des bordants est non nul, la famille $\{v_1, ..., v_r, w\}$ serait libre.

$\Longleftarrow$) On considère la matrice $B = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} a_{11} & \dots & a_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{r1} & \dots & a_{rr} \end{matrix}} & \begin{matrix} b_1 \\ \vdots \\ b_r \end{matrix} \\ \begin{matrix} a_{r+1,1} & \dots & a_{r+1,r} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nr} \end{matrix} & \begin{matrix} b_{r+1} \\ \vdots \\ b_n \end{matrix} \end{pmatrix}$.

Quitte a changer l'ordre des lignes et des colonnes, on peut supposer que le mineur δ non nul est le mineur encadré. Les r premiers vecteurs lignes de B sont indépendants, et chacun des autres est lié à ces derniers. Ainsi $rangB = r$, donc les vecteurs colonnes de B $\{v_1, ..., v_r, w\}$ forment une famille de rang r et comme $\{v_1, ..., v_r\}$ est libre, $w \in \langle v_1, ..., v_r \rangle$.

Exemple 4.9.1. *: Pour quelles valeurs de α, $\beta \in \mathbb{R}$ le vecteur $w = \begin{pmatrix} \alpha \\ 2 \\ 1 \\ \beta \end{pmatrix}$ appartient-il au sous-espace de $\mathbb{R}^4$ engendré par les vecteurs $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et*

$v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$?

On a $A = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix}} \\ \begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix} \end{pmatrix}$ $\delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$ *et*

$B = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix}} & \begin{matrix} \alpha \\ 2 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix} & \begin{matrix} 1 \\ \beta \end{matrix} \end{pmatrix}$.

Les bordants de δ *sont* $\triangle_1 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \alpha \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & \alpha \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 - \alpha$ *et* $\triangle_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \alpha \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & \beta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \beta & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = \beta - 2$. *Donc* $w \in \langle v_1, v_2 \rangle$ *si et seulement si* $\alpha = 1$ *et* $\beta = 2$.

4.9.4 Détermination du rang

Théorème 4.9.4. *: Soit* $A \in \mathcal{M}_{p,n}(\boldsymbol{K})$. *Le rang de* A *est* r *si et seulement si on peut extraire de* A *un mineur* δ *d'ordre* r *non nul et tous les bordants de* δ *dans* A *sont nuls.*

Preuve :

$\Longleftarrow$) $A = \left\| v_1, \cdots, v_n \right\| = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} a_{11} \dots a_{1r} \\ \vdots \qquad \vdots \\ a_{r1} \dots a_{rr} \end{matrix}} & \begin{matrix} \dots & a_{1n} \\ & \vdots \\ \dots & a_{rn} \end{matrix} \\ \begin{matrix} a_{r+1,1} \dots a_{r+1,r} \\ \vdots \qquad \vdots \\ a_{p1} \dots a_{pr} \end{matrix} & \begin{matrix} \dots & a_{r+1,n} \\ & \vdots \\ \dots & a_{pn} \end{matrix} \end{pmatrix}$.

Soit δ le mineur encadré. Les vecteurs $\{v_1, ..., v_r\}$ sont alors indépendants et chaque vecteurs v_s ($s \geq r+1$) appartient à l'espace $\langle v_1, ..., v_r \rangle$. Donc les vecteurs colonnes engendrent un espace de dimension r, d'où $rangA = r$.

$\Longrightarrow$) Quitte à changer l'ordre des colonnes de A, on peut supposer que $\{v_1, ..., v_r\}$ est libre. On peut alors extraire de la matrice formée par les r premières colonnes de A un mineur δ d'ordre r non nul. Quitte à changer la numérotation des coordonnées, on peut supposer que δ soit le mineur formé par les r premières colonnes de A. Or $rangA = r$, d'où $v_s \in \langle v_1, ..., v_r \rangle$ pour $s \geq r+1$; d'après le théorème 4.9.3 tous les bordants de δ dans sont nuls.

Théorème 4.9.5. *: Le rang d'une matrice A est l'ordre maximal des mineurs non nuls extraits de A, c'est à dire :*

$$rangA = r \Longleftrightarrow \begin{cases} 1) & \textit{Il existe un mineur d'ordre } r \textit{ non nul} \\ 2) & \textit{Tous les mineurs d'ordre } s > r \textit{ sont nuls.} \end{cases}$$

Preuve : $\Longrightarrow$) S'il existait un mineur d'ordre $s > r$ non nul, on pourrait extraire des colonnes de A une famille libre formée de $s > r$ vecteurs, or ceci est impossible car les vecteurs colonnes de A engendrent un espace de dimension r.

$\Longleftarrow$) Découle du théorème 4.9.4.